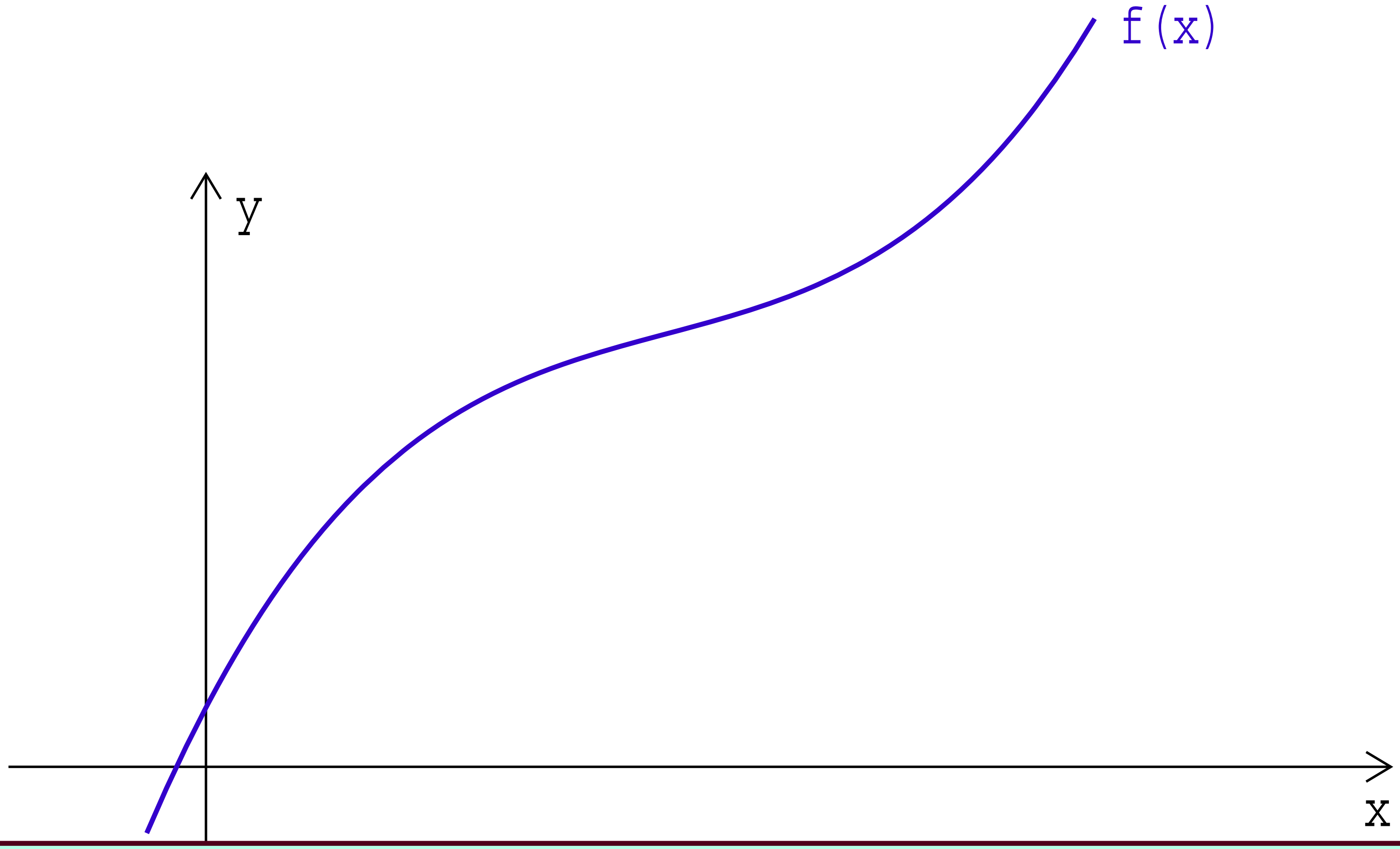
# Ausgewählte Kapitel aus der Mathematik Integralrechnung

*G. Wegener*

Hannover, im November 2018,

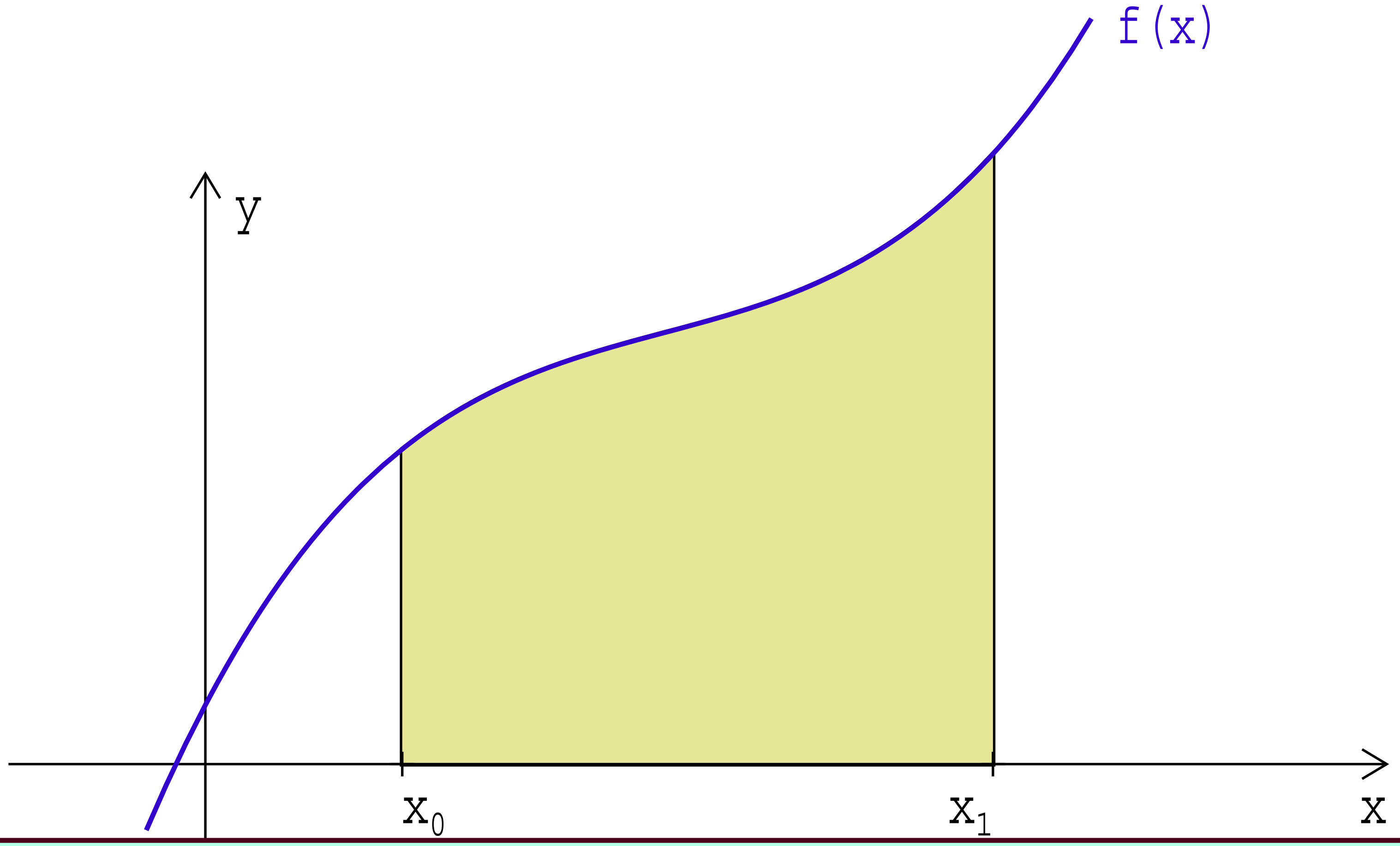
# Flächenberechnung

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$.



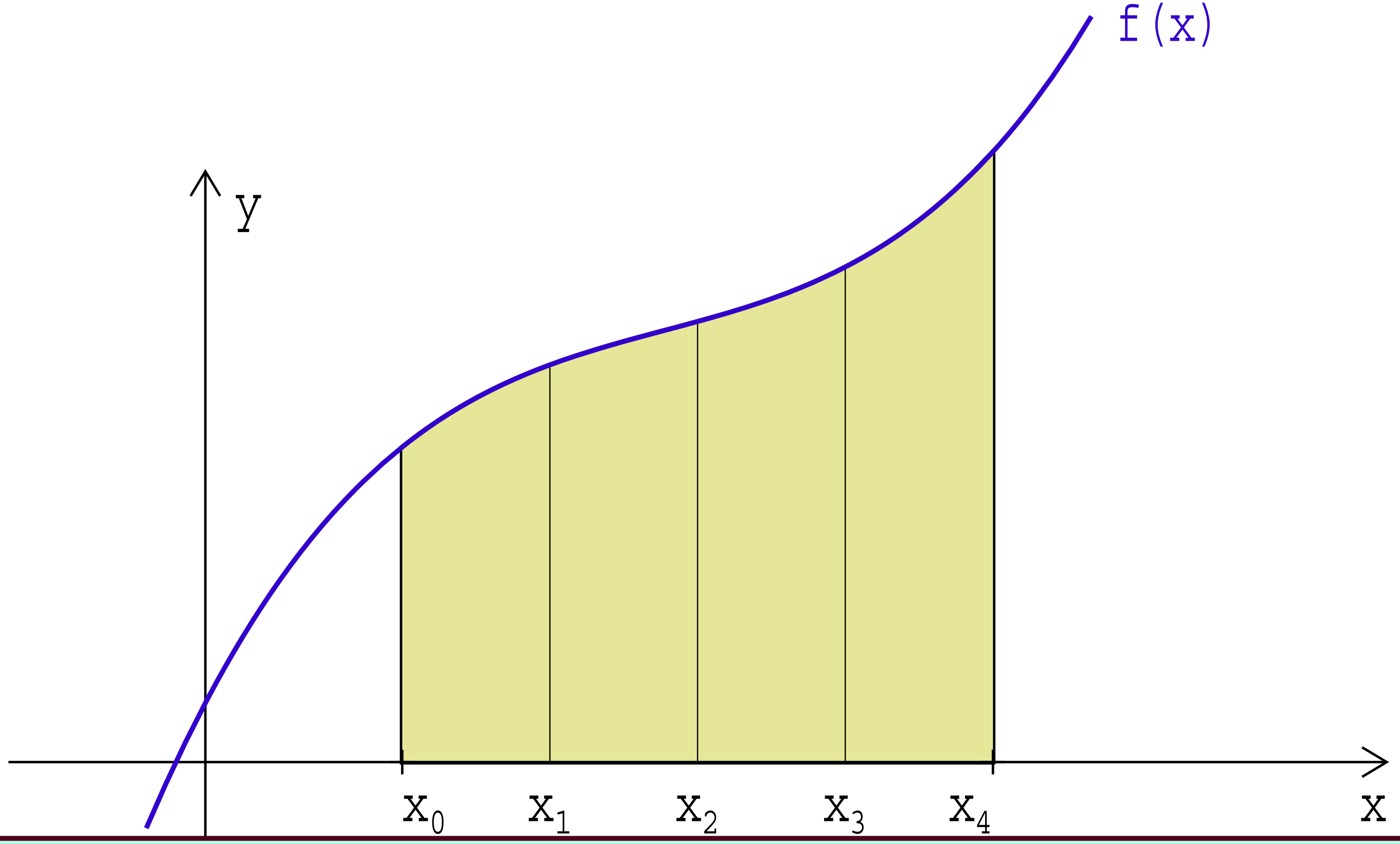
# Flächenberechnung

Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve von $x_0$ bis $x_1$ und der $x$-Achse.



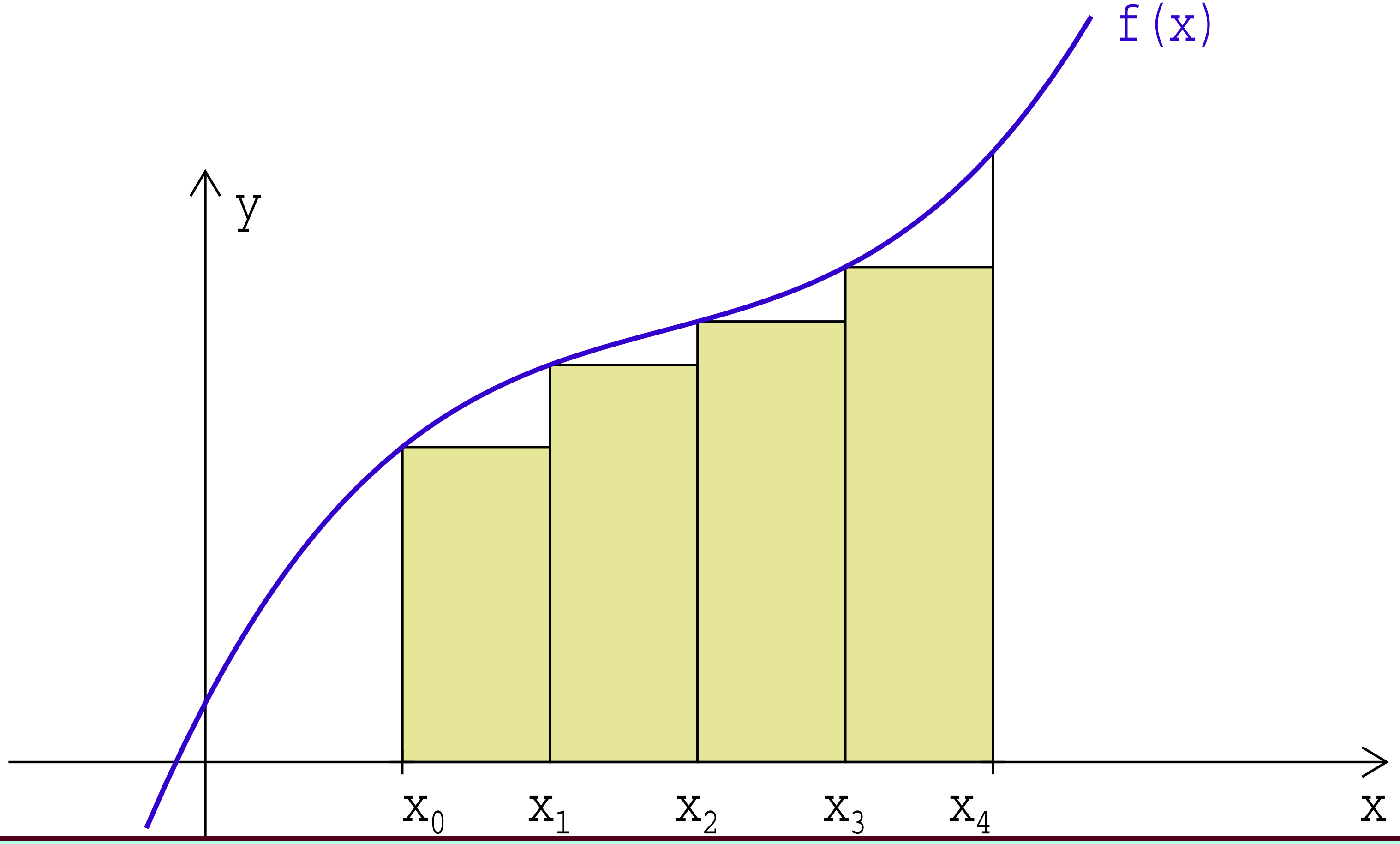
# Flächenberechnung

Wir benennen $x_1$ um in $x_n$ und teilen den Bereich zwischen $x_0$ und $x_n$ in $n$ gleiche Teile. Hier sei $n=4$.



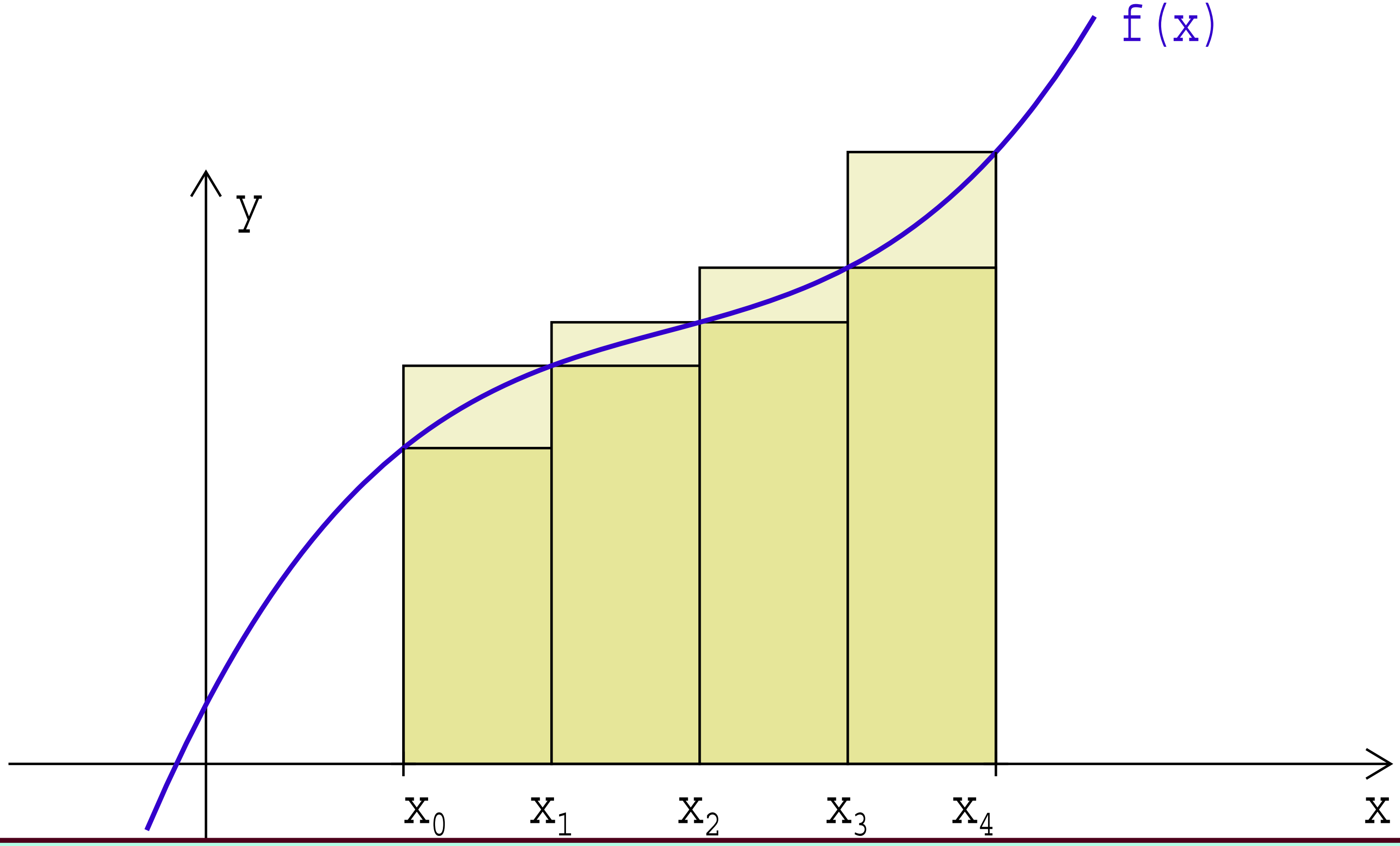
# Flächenberechnung

Wir schätzen nun die Fläche durch Aufaddieren der Flächen der an den Stellen $x_i$ gebildeten Rechtecke.



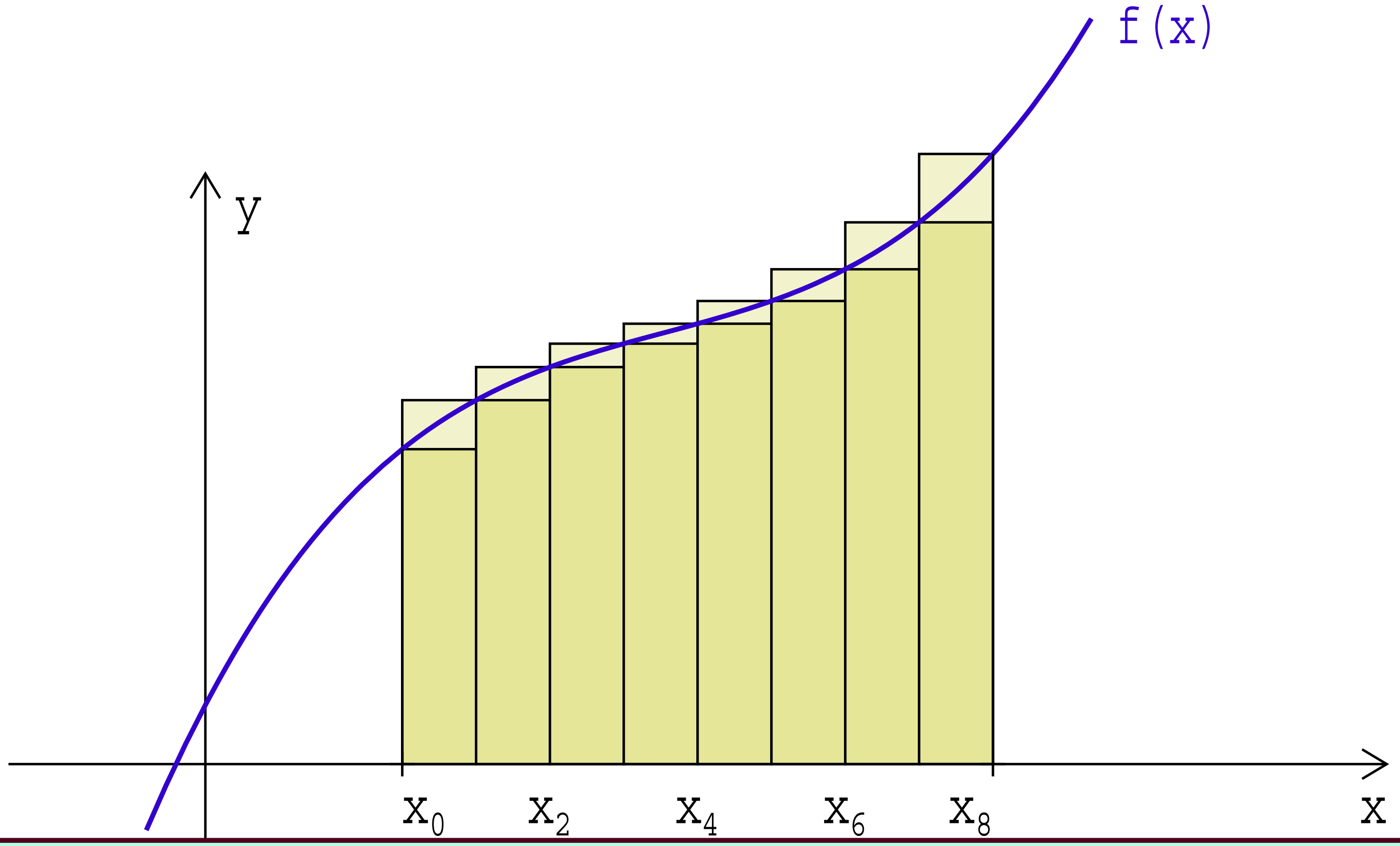
# Flächenberechnung

Man kann die Rechtecke auch von der rechten Seite her anfangen.



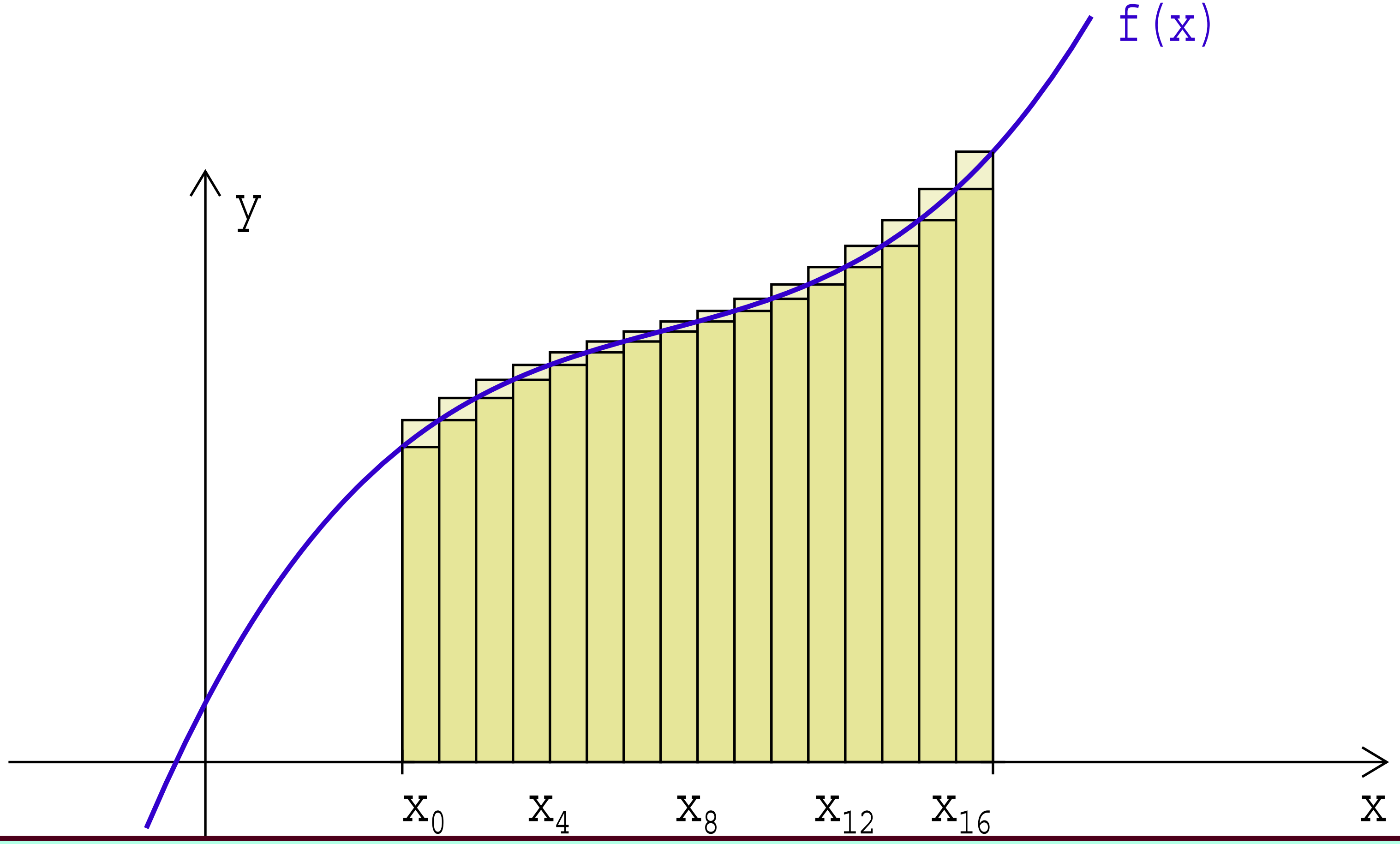
# Flächenberechnung

Wenn man jetzt $n$ vergrößert, wird dadurch die Schätzung der Fläche genauer.



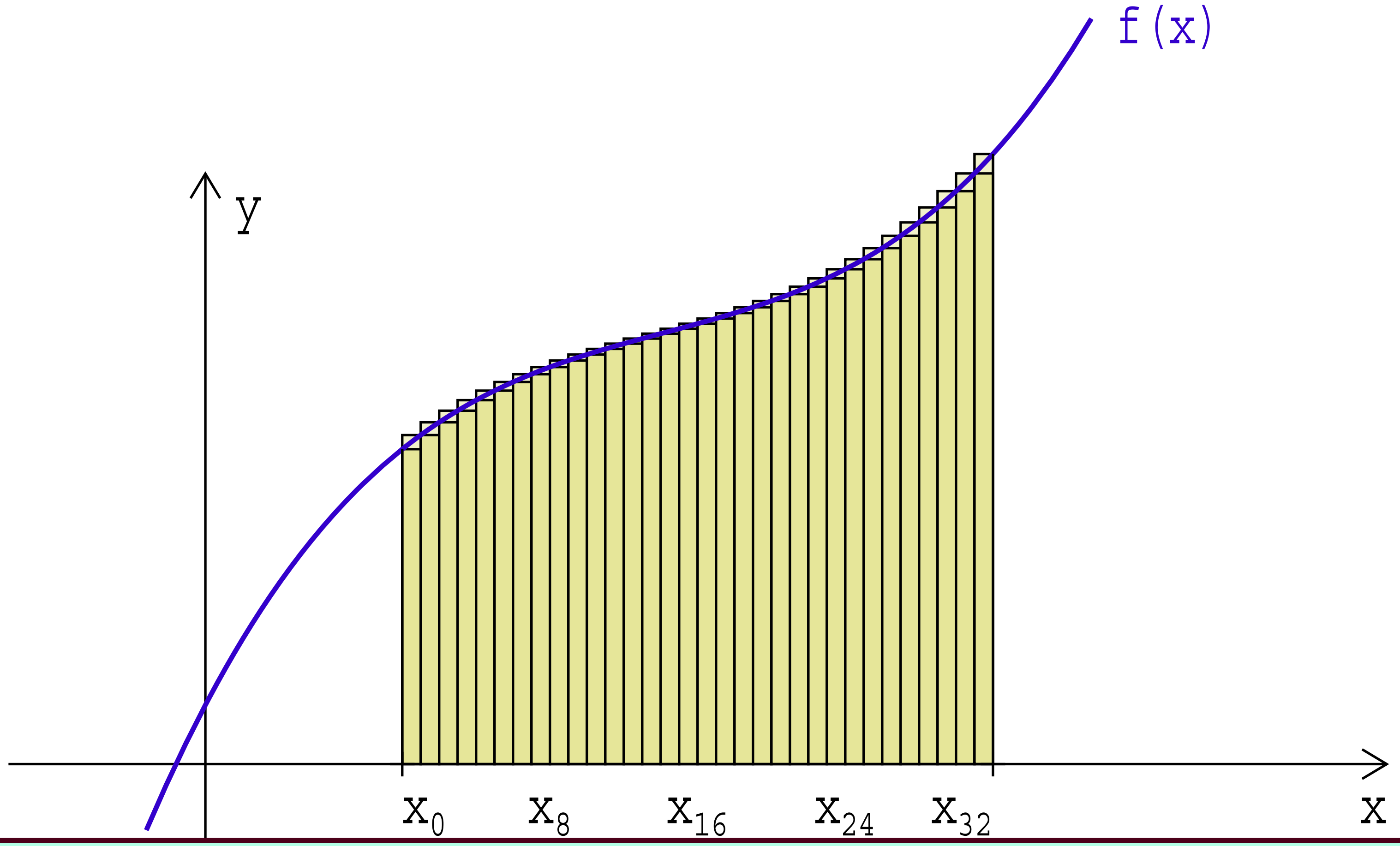
# Flächenberechnung

Und noch besser: $n=16$.



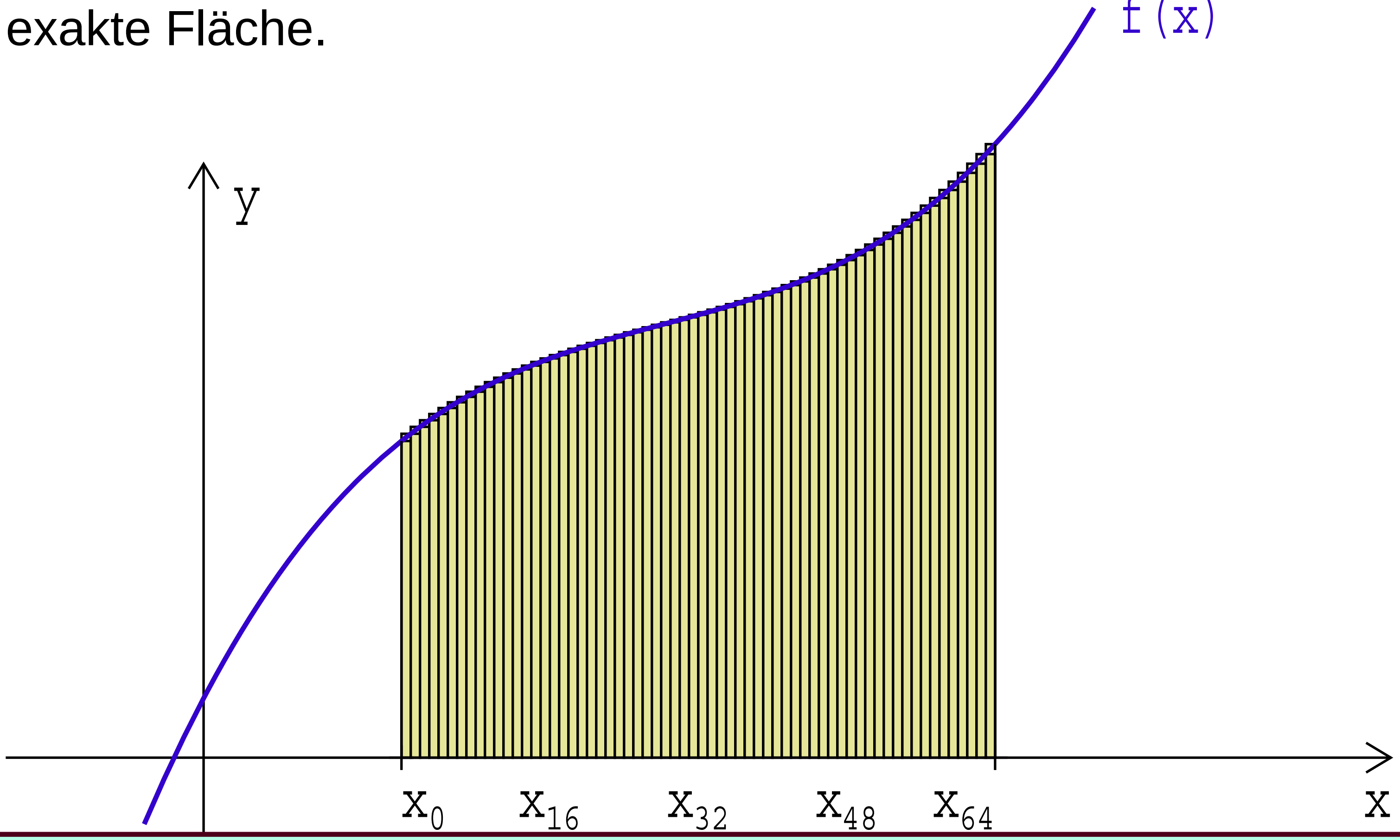
# Flächenberechnung

Und noch besser: $n=32$.



## Flächenberechnung

Und noch besser: $n=64$. Jetzt ist die Schätzung der Fläche schon ziemlich genau. Lässt man die Zahl $n$ der Abschnitte gegen $\infty$ laufen, so erhält man als Grenzwert die exakte Fläche.



## Flächenberechnung

Wir berechnen nun die Summe der einzelnen Rechtecke:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \frac{x_n - x_0}{n} =$$

$$\frac{x_n - x_0}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_0 + i \cdot \frac{x_n - x_0}{n}\right)$$

Die Fläche unterhalb der Kurve ist nun der Grenzwert dieser Summe für $n \to \infty$.

# Integrationsregeln

Wir bestimmen den Grenzwert für ein Beispiel:

$$f(x) = a$$

$$F = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_0 + i \cdot \frac{x_n - x_0}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_0}{n} \cdot n \cdot a$$

$$= a \cdot (x_n - x_0)$$

# Integrationsregeln

Nun bestimmen wir den Grenzwert für ein anderes Beispiel:

$$f(x) = a \cdot x$$

$$F = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_0 + i \cdot \frac{x_n - x_0}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a \cdot \left(x_0 + i \cdot \frac{x_n - x_0}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot \frac{x_n - x_0}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left(n \cdot x_0 + \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} a \cdot \left(\frac{x_n - x_0}{n} \cdot n \cdot x_0 + \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} a \cdot \left((x_n - x_0) \cdot x_0 + \frac{(x_n - x_0)^2 \cdot n}{2 \cdot n} - \frac{(x_n - x_0)^2}{2 \cdot n}\right)$$

# Integrationsregeln

Fortsetzung:

$$= \lim_{n\to\infty} a\cdot\left(x_n x_0 - x_0^2 + \frac{1}{2}x_n^2 - x_n x_0 + \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{(x_n - x_0)^2}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} a\cdot\left(\frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{(x_n - x_0)^2}{2n}\right)$$

$$= \frac{a}{2}\cdot(x_n^2 - x_0^2)$$

# Stammfunktion

Sei $\mathbf{F(x)}$ eine differenzierbare Funktion und $f(x)=F'(x)$ deren Ableitung. Dann heißt $F(x)$ **Stammfunktion** von $f(x)$. Da bei der Ableitung Konstanten wegfallen, lässt sich eine Stammfunktion stets um eine beliebige Konstante $c$ verschieben. Diese wird auch **Integrationskonstante** genannt. Die Schreibweise

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad (\text{mit } F'(x)=f(x))$$

heißt **unbestimmtes Integral**. Das Symbol $\int$ stellt ein stilisiertes S dar und stammt von Leibniz *(Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716)*. Die Formel

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet das **bestimmte Integral**, also die Fläche zwischen den Stellen $a$ und $b$, der Funktion $f(x)$ und der $x$-Achse. $a$ und $b$ werden auch **Integrationsgrenzen** genannt.

# Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Sei $f(x)$ eine Funktion und $F(x)$ deren Stammfunktion. Dann gilt für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Dieser Satz wird **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung** genannt. Nicht zu jeder Funktion lässt sich eine Stammfunktion angeben!

# Integrationsregeln

Ist **f(x)** Produkt einer Konstante a und einer Funktion **g(x)**, so gilt:

$$\int f(x)\,dx = \int a \cdot g(x)\,dx = a \cdot \int g(x)\,dx$$

Ist eine Funktion **f(x)** Summe oder Differenz zweier Funktionen **g(x)** und **h(x)**, so gilt:

$$\int f(x)\,dx = \int (g(x) \pm h(x))\,dx = \int g(x)\,dx \pm \int h(x)\,dx$$

Ist eine Funktion **f(x)** Potenz $\mathbf{x^n}$, so gilt:

$$\int f(x)\,dx = \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

# Integrationsregeln

Als Umkehrung der Produktregel der Differenzialrechnung lässt sich für zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ folgende Beziehung herleiten:

$$g(x) \cdot h(x) = \int g'(x) \cdot h(x)\,dx + \int g(x) \cdot h'(x)\,dx$$

Durch Umformung erhält man:

$$\int g'(x) \cdot h(x)\,dx = g(x) \cdot h(x) - \int g(x) \cdot h'(x)\,dx$$

# Integrationsregeln

Als Umkehrung der Kettenregel der Differenzialrechnung lässt sich für eine Funktionen $f(x)=f(g(t))$ folgende Beziehung herleiten:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

Diese Regel wird **Integration durch Substitution** genannt.